一般位相と解析学　講義報告　第 4 回 *

数学工房 †

2008 年 6 月 29 日 14:00-16:30

概要

まず有向集合の定義を与えた．有向集合の例として，線型順序集合，束，有限部分集合の集合，開集合系，近傍系などがあることを示した．また区間の有限分割の集合も有向集合になることを示した．次に列の一般化であるネットを定義した．ネットとは有向集合から集合への写像のことである．またネットの収束を定義して，Riemann 積分をネットの収束値として表現した．最後に Cauchy 列に相当する Cauchy ネットを定義した．

1　有向集合

1.1　有向集合の定義

定義 1.1 (有向集合)**.** D が有向集合であるとは，D 上の 2 項関係 $\preceq$ が存在して次の性質を満たすことである．

D1 反射律　$\lambda \preceq \lambda,\ (\lambda \in D)$
D2 推移率　$\lambda \preceq \mu$ かつ $\mu \preceq \nu$ ならば $\lambda \preceq \nu,\ (\lambda,\ \mu,\ \nu \in D)$
D3 上界の存在　$\lambda,\ \mu \in D$ に対して $\lambda \preceq \nu,\ \mu \preceq \nu$ を満たす $\nu \in D$ が存在する

有向集合と似た関係に順序関係があるが微妙な違いがあることに注意せよ．順序では

$$\lambda \preceq \mu,\ \mu \preceq \lambda \Longrightarrow \lambda = \mu$$

が成り立つことが要請されるが有向集合にはこの性質は要求されない．

1.2　順序集合と有向集合

順序の定義（公理）を示す．

定義 1.2 (順序関係・順序集合)**.** 集合 D 上の関係 $\preceq$ が順序関係であるとは，次の 3 条件を満たすことである．

O1 反射律　$\lambda \preceq \lambda,\ (\forall\lambda \in D)$
O2 反対称律　$\lambda \preceq \mu$ かつ $\mu \preceq \lambda$ ならば $\lambda = \mu,\ (\lambda,\ \mu \in D)$
O3 推移律　$\lambda \preceq \mu,\ \mu \preceq \nu$ ならば $\lambda \preceq \nu,\ (\lambda,\ \mu,\ \nu \in D)$

* Reported by H.T.
† http://www.sugakukobo.com

集合と関係の組 $(D,\ \preceq)$ を順序集合という．順序集合を半順序集合と呼ぶことがある．

定義 1.3 (線型順序集合)**.** 集合と関係の組 $(L,\ \preceq)$ が線型順序集合とは

L1 順序集合　$(L,\ \preceq)$ は順序集合である
L2 全順序性　任意の $\lambda,\ \mu \in L$ に対して $\lambda \preceq \mu$ もしくは $\mu \preceq \lambda$ である

線型順序集合を全順序集合と呼ぶことがある．

以下，さまざまな有向集合の例を見ていくことにする．

命題 1.1. $(D,\ \preceq)$ が線型順序集合なら有向集合である．

演習 1.1. 命題 *1.1* を示せ．性質 *D1, D2* は順序集合の条件なので *D3* を示せばよい．

1.3　束（Lattice）と有向集合

定義 1.4 (順序集合の上界と下界)**.** $(D,\ \preceq)$ を順序集合とする．$M \subset D$ とする．$s \in D$ が M の上界とは任意の $m \in M$ に対して $m \preceq s$ が成立することである．$s' \in D$ が M の下界とは任意の $m \in M$ に対して $s' \preceq m$ が成立することである．

定義 1.5 (上限・下限)**.** 定義 1.4 の D と M に対して $a \in D$ が M の上限とは順序について最小の上界であることである．すなわち a が M の上限で u が M の任意の上界なら $a \preceq u$ である．記号で

$$\sup M = a$$

と書く．
同様に，$b \in D$ が M の下限であるとは順序について最大の下界であることである．記号で

$$\inf M = b$$

と書く．

定義 1.6. $\sup\{a,\ b\}$ とは $\{a,\ b\}$ の上限のことである．すなわち $c = \sup\{a,\ b\}$ ならば

$$a \preceq c \text{ かつ } b \preceq c$$
$$\forall u \text{ s.t. } a \preceq u \text{ かつ } b \preceq u \Longrightarrow c \preceq u$$

が成り立つ．同様に $\inf\{a,\ b\}$ とは $\{a,\ b\}$ の下限である．$d = \inf\{a,\ b\}$ ならば

$$d \preceq a \text{ かつ } d \preceq b$$
$$\forall u \text{ s.t. } u \preceq a \text{ かつ } u \preceq b \Longrightarrow u \preceq d$$

が成り立つ．

定義 1.7 (束)**.** $(D,\ \preceq)$ が束であるとは次の 2 条件を満たすことである．

1° $(D,\ \preceq)$ が順序集合である
2° 任意の $\lambda,\ \mu \in D$ に対して $\exists \nu = \sup\{\lambda,\ \mu\}$,　$\exists \nu' = \inf\{\lambda,\ \mu\}$

束上には 2 種類の（逆向きの）自然な有向集合が定義される．順序関係の記号を $\leq$ とするとき，束上の 2 項関係を次のように 2 種類（$\preceq$, $\boxed{\preceq}$）定めることができる．$x,\ y \in D$ に対して

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x \leq y$$
$$x \boxed{\preceq} y \Longleftrightarrow y \leq x$$

命題 1.2. 束は $\preceq$, $\boxed{\preceq}$ について有向集合である．

演習 1.2. 命題 *1.2* を示せ．束の場合も順序集合なので有向集合の性質 *D3*, すなわち上界の存在を示せばよい．

束の例に自然数上の約数関係がある．すなわち 2 つの自然数 $a,\ b \in \mathbb{N}$ に対して a が b を割り切る関係を 2 項関係とする．すなわち

$$a \preceq b := a \mid b$$

という 2 項関係を定義する．

演習 1.3. $\mathbb{N}$ 上の約数関係が束であることを示せ．順序関係であること，上限と下限の存在を示せばよい．

1.4 集合・位相空間が作る有向集合

命題 1.3. 集合 $\Omega \neq \emptyset$ に対して $\mathscr{F}(\Omega)$ を Ω の有限部分集合の全体とする．$A,\ B \in \mathscr{F}(\Omega)$ とするとき *2* 項関係を

$$A \preceq B := A \subset B$$

と定義すると $(\mathscr{F}(\Omega),\ \preceq)$ は有向集合である．

演習 1.4. 命題 *1.3* を示せ．これはさらに束になっていることに注意せよ．

命題 1.4. 位相空間 X を考える．これに対して次の命題が成り立つ．

1° $\mathfrak{O}(X)$ を X の開集合系とする．任意の $U,\ V \in \mathfrak{O}(X)$ に対して $U \preceq V := U \subset V$ と定義すると $(\mathfrak{O}(X),\ \preceq)$ は有向集合である．

2° $x_0 \in X$ を固定する．$\mathfrak{V}(x_0)$ を x_0 の近傍系とする．$U \preceq V := V \subset U$ と定義すると $(\mathfrak{V}(x_0),\ \preceq)$ は有向集合である．

演習 1.5. 命題 *1.4* を示せ．これは宿題とする．

1.5 区間の有限分割が作る有向集合

$I = [\alpha,\ \beta]$ を固定する．Δ を I の有限分割とする．すなわち

$$\Delta : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = \beta$$

とする．

分割 Δ の幅（大きさ）を次で評価する．

$$|\Delta| := \max_{1 \leqq j \leqq m} \{x_j - x_{j-1}\}$$

分割 Δ の代表点を ξ_Δ とする．これは

$$\xi_\Delta := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m), \quad \xi_j \in [x_{j-1},\ x_j], \quad (1 \leqq j \leqq m)$$

で定義される．すなわち分割された各区間から任意に取り出した m 個の点のことである．以上で定義された区間の有限分割と代表点の組の全体を $\mathfrak{Z}$ とする．すなわち

$$\mathfrak{Z} := \{(\Delta,\ \xi_\Delta)\}$$

とする．

以上で定義された区間の有限分割と代表点の組に対して，次のような関係を定義すると，有向集合となる．すなわち次の命題が成り立つ．

命題 1.5. $\mathfrak{Z}$ を有限分割と代表点の組の全体とする．また $(\Delta_1,\ \xi_{\Delta_1})$，$(\Delta_2,\ \xi_{\Delta_2}) \in \mathfrak{Z}$ とし，*2* 項関係を

$$(\Delta_1,\ \xi_{\Delta_1}) \preceq (\Delta_2,\ \xi_{\Delta_2}) := |\Delta_2| \leqq |\Delta_1|$$

と定義するとき $(\Delta,\ \xi_\Delta) \in \mathfrak{Z}$ は有向集合である．

演習 1.6. 命題 *1.5* を示せ．

（注意）．ここで定義した有限分割は順序関係ではない．反対称律が成立しないからである．$|\Delta_1| \preceq |\Delta_2|$，$|\Delta_2| \preceq |\Delta_1|$ であっても，Δ_1 と Δ_2 の最大の幅が等しいだけであり，分割全体として等しいとは限らない．

2　ネットとネットの収束

2.1　ネットの定義

定義 2.1 (ネット)**.** 有向集合 $(D,\ \preceq)$ と集合 X が与えられているとする．このとき次の写像

$$\varphi : D \longrightarrow X$$

を X 上のネットという．

2.2　ネットの収束

定義 2.2 (ネットの収束)**.** X を位相空間とする．ネット

$$\varphi : D \longrightarrow X$$

が $x_0 \in X$ に収束するとは，任意の $V \in \mathfrak{V}(x_0)$ について

$$\exists \lambda_\nu \in D \text{ s.t. } \varphi(\lambda) \in V \quad \text{for } \forall \lambda\ (\lambda_\nu \preceq \lambda)$$

となることである．すなわち，ある $\lambda_\nu \in D$ が存在して，$\lambda_\mu \preceq \lambda$ となる任意の λ に対しては $\varphi(\lambda) \in V$ となることである．

ネットの収束については次の命題が成り立つ．

命題 2.1 (ネットの収束の一意性)**.** X を *Hausdorff* 空間とする．ネット

$$\varphi : D \longrightarrow X$$

が $x_0 \in X$ に収束するとき x_0 は唯一定にまる．

演習 2.1. 命題 *2.1* を示せ．対偶を示すのが楽である．収束先が $x_0,\ y_0$ の *2* つあるとすると，*Hausdorff* 空間でないことを導けばよい．

位相空間が Hausdorff 空間であるとは，空間のどんな 2 点も重なりを持たない近傍で分離できることを意味している．定義は以下の通りである．

定義 2.3 (Hausdorff 空間)**.** 位相空間 X が Hausdorff 空間であるとは，任意の $x_0 \in X$ と $y_0 \in X$ が $x_0 \neq y_0$ であるとき

$$\exists U \in \mathfrak{V}(x_0),\ \exists V \in \mathfrak{V}(y_0) \ \text{ s.t. } U \cap V = \emptyset$$

となることである．

演習 2.1 では Hausdorff 空間でないことを言わなくてはならない．すなわち次の事実を利用する．

命題 2.2. 位相空間が *Hausdorff* 空間でないとは $x_0,\ y_0$ で次の性質を持つものが存在することである．

$$\forall U \in \mathfrak{V}(x_0),\ \forall V \in \mathfrak{V}(y_0) \text{ について } U \cap V \neq \emptyset$$

2.3 Riemann 積分のネットによる表現

ネットの収束を使って，Riemann 積分を定義することができる．

定義 2.4 (ネットによる Riemann 積分の表現)**.** 有界関数

$$f : [\alpha,\ \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

が与えられている．$\mathfrak{Z}$ を区間の有限分割とその代表点の対からなる有向集合とする．

$$\int_f : \mathfrak{Z} \ni (\mathit{\Delta},\ \xi_{\mathit{\Delta}}) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(\xi_j - \xi_{j-1}) \in \mathbb{R}$$

はネットであり，これが収束するとき Riemann 積分可能という．またその極限を

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

と記す．

2.4 Cauchy ネット

Cauchy 列に相当する Cauchy ネットを考えることができる．

定義 2.5 (Cauchy ネット)**.** D を有向集合，E を位相線型空間とする．ネット $\varphi : D \longrightarrow E$ が Cauchy ネットであるとは任意の $V \in \mathfrak{V}(\mathbf{0})$ に対して

$$\exists \nu \in D \ \text{ s.t. } \varphi(\lambda) - \varphi(\mu) \in V \ \text{ for } \forall\lambda,\ \forall\mu\ (\nu \preceq \lambda,\ \nu \preceq \mu)$$

が成り立つことである．

ただし位相線型空間の定義は次の通りである．

定義 2.6 (位相線型空間)**.** $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$ 上の線型空間 E が位相線型空間であるとは E の位相 $\mathscr{S}$ が与えられ，次に示す加法と $\mathbb{K}$ 倍の写像 a と s が連続となることである．

$$\begin{aligned} a &: E \times E \longrightarrow E, & a(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in E) \\ s &: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, & s(\lambda,\ \boldsymbol{u}) &= \lambda \boldsymbol{u},\ (\lambda \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{u} \in E) \end{aligned}$$

命題 2.3. $X(\neq \emptyset)$ を位相空間とする．$A \subset X$ が閉集合である必要十分条件は任意の A-値ネット

$$\varphi : D \longrightarrow X \quad (\varphi(D) \subset A)$$

が $x_0 \in X$ に収束するとき $x_0 \in A$ が成り立つことである．

演習 2.2. 命題 *2.3* を示せ．